

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Die geometrische Reihe

Dr. Björn S. Schmekel
Wintersemester 2010/2011

Die geometrische Reihe

Frau Berger spart jedes Jahr 1000€. Das Guthaben wird zusammen mit den Zinsen zu 4% verzinst. Wie groß ist ihr Guthaben nach 30 Jahren?

Mit $q = 1,04$ haben wir nach null, einem bzw. zwei Jahren

$$1000 \text{ €} = 1000 \text{ €} \cdot q^0$$

$$1000 \text{ €} \cdot q + 1000 \text{ €} = 1000 \text{ €} \cdot (q^0 + q^1)$$

$$(1000 \text{ €} \cdot q + 1000 \text{ €}) \cdot q + 1000 \text{ €} = 1000 \text{ €} \cdot (q^0 + q^1 + q^2)$$

allgemein nach n Jahren

$$1000 \text{ €} \sum_{i=0}^n q^i$$

Gibt es für die Summe eine einfache Formel?

Die geometrische Reihe

Herleitung eines geschlossenen Ausdrucks

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Gleichung mit q multiplizieren

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

Gleichungen subtrahieren

$$s_n - qs_n = 1 - q^{n+1}$$

Auflösen nach s_n

$$s_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Siehe Übungen

Die geometrische Reihe

Ergebnis

$$1000 \text{ €} \cdot \frac{1 - 1,04^{30+1}}{1 - 1,04} = 59328,34 \text{ €}$$

Die geometrische Reihe

Beispiel 2:

Ein Kredit von 70000 Euro unterliegt einem Zinssatz von 3,5%.

Am Ende eines jeden Jahres wird 10000 Euro an Zinsen und Tilgung bezahlt.

Wie groß ist die Restschuld nach 5 Jahren?

Die geometrische Reihe

Beispiel 2:

Ein Kredit von 70.000 Euro unterliegt einem Zinssatz von 3,5%.
Am Ende eines jeden Jahres wird 10.000 Euro an Zinsen und Tilgung bezahlt.
Wie groß ist die Restschuld nach 5 Jahren?

$$S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} \quad \leftarrow \text{Achtung: kein } k+1$$

Hierbei ist $k=5$, $S_0=70.000$ und $q=1,035$. Der erste Term ist der mit Zinseszinsen verzinste Kredit. Der zweite Term beschreibt die mit Zinseszinsen zum gleichen Zinssatz verzinste Zahlungen des Kreditnehmers.

$S_5=29.513,38$ Euro

Die geometrische Reihe

Beispiel 3:

Daten wie in Beispiel 2. Nach wie vielen Jahren beträgt die Restschuld noch 5.000 Euro?

$$S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

auflösen nach k : q^k ausklammern

$$(1 - q)S_k + a = q^k [a + (1 - q)S_0]$$

$$k = \frac{\ln \left[\frac{a + (1 - q)S_k}{a + (1 - q)S_0} \right]}{\ln q}$$

$$k = 7,7$$

Die geometrische Reihe

Beispiel 4:

Eine Lebensversicherung in Höhe von 200.000€ soll über 20 Jahre mit Kapitalverzehr ausbezahlt werden. Wie hoch ist die jährliche Rentenzahlung? Der Zinssatz liege in diesem Zeitraum bei 4%.

Die geometrische Reihe

Beispiel 4:

Eine Lebensversicherung in Höhe von 200.000€ soll über 20 Jahre mit Kapitalverzehr ausbezahlt werden. Wie hoch ist die jährliche Rentenzahlung? Der Zinssatz liege in diesem Zeitraum bei 4%.

$$a = S_0 \cdot \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-n}}$$

 Achtung: negative Exponenten!

$$a = 14.150,34\text{€}$$