Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Unterjährige Verzinsung / Die Eulersche Zahl

Dr. Björn S. Schmekel
Wintersemester 2010/2011

Unterjährige Verzinsung - I

In der Regel beziehen sich Zinssätze auf ein Jahr.
Häufig wird jedoch pro Jahr mehr als einmal verzinst.

Beispiel: Das Guthaben wird monatlich verzinst.

Der Zinssatz beträgt dann 1/12 des angegebenen Jahreszins.
Dies nennt man **unterjährige Verzinsung**.

Aufgabe: Der Jahreszins beträgt 4%. Es wird monatlich verzinst.
Was wird aus 1000€ nach einem Jahr?

Unterjährige Verzinsung - II

$$1000\,€ \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{100}\right)^{12} = 1040{,}74\,€$$

Der effektive Jahreszins

Durch einen etwaigen Zinseszinseffekt steigt das Vermögen stärker, als dies bei einer nur einmaligen jährlichen Verzinsung der Fall wäre. Bei einer einmaligen jährlichen Verzinsung hätten wir „nur“ 1040,00€ nach einem Jahr.

Damit ist der jährliche Zinssatz – wenn nur einmal pro Jahr verzinst werden würde – effektiv größer als angegeben. Der Prozentsatz, um den das Vermögen in einem Jahr tatsächlich steigt, nennt man den **effektiven Jahreszins**.

In unserem Beispiel beträgt er 4,07%, weil

$$\left(1+\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{100}\right)^{12}=1{,}0407$$

Die Eulersche Zahl

Ihr Guthaben von 1€ wird zu 100% verzinst. Wir betrachten unterjährige Verzinsung, d.h. wir betrachten die jährliche Verzinsung zu 100%, die monatliche Verzinsung zu 1/12 davon, tägliche Verzinsung zu 1/365 vom Zinssatz. Wie hoch ist das Guthaben nach einem Jahr?

Es beträgt

$$1€\cdot\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{n}$$

wobei n die Anzahl der Verzinsungen in diesem einen Jahr ist.

Aufgrund des Zinseszinseffekts ist es günstiger, häufiger zu verzinsen.
Was passiert bei einer hypothetisch angenommen sehr häufigen Verzinsung (stündlich, jede Minute, jede Sekunde)?

Die Eulersche Zahl

n	Betrag
1	
12	
365	
1000	
10000	
100000	
1000000	

Die Eulersche Zahl

Ergebnis:

Der Betrag übersteigt einen gewissen Grenzwert nicht. Das Vermögen kann sich höchstens um den Faktor e = 2,7182818.... vergrößern.

Dies ist die Eulersche Zahl. Sie ist eine der wichtigsten (die wichtigste?) Konstanten in der Mathematik.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die Eulersche Zahl – Die Exponentialfunktion

Wir haben bereits ohne Beweis besprochen, daß die Funktion $f(x)=e^x$ ihre eigene Ableitung ist. Dies soll nun nachgeholt werden.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Der letzte Grenzwert ist gleich 1. Im folgenden sei $\varepsilon = \Delta x$ eine sehr kleine Zahl.

Dann gilt also mit der Definition der Eulerschen Zahl

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\varepsilon} = 1 + \varepsilon$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion II

Beweis:

Mit $n' = n\varepsilon$ erhalten wir

$$\lim_{n' \to \infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{n'}\right)^{n'} = 1 + \varepsilon$$

Wir berechnen die linke Seite für $n' = 1 \ldots 3$

$$(1+\varepsilon)$$

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)$$

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2)$$

etc. quod erat demonstrandum