Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Dr. Björn S. Schmekel
Wintersemester 2010/2011

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen

In Analogie zur Definition der Multiplikation definiert man

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n mal}}$$

a wird die Basis der Potenz genannt, n der Exponent

Beispiele

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Vorsicht : Potenzieren geht vor Multiplizieren

$$-0{,}5^2 = -0{,}5 \cdot 0{,}5$$

Man betrachte hierzu analog die Definition der Multiplikation

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzgesetze - I

Man betrachte

$$2^3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$$

allgemein

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m mal}} = a^{m+n}$$

Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

Beispiele:

$$4^2 \cdot 4^7 = 4^9$$

$$10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2 \text{ (zu negativen Exponenten später mehr)}$$

$$a^2 \cdot a^4 = a^6$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzgesetze - II

Man betrachte die Division

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2$$

allgemein

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}}^{\text{m mal}}}{\underbrace{\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}}_{\text{n mal}}} = a^{m-n}$$

Potenzen mit der gleichen Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.

Beispiel

$$\frac{10^8}{10^5} = 10^3$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzgesetze - III

Man betrachte

$$\left(2^3\right)^2 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2^6$$

allgemein

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{\text{m mal}}\cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{\text{m mal}}\cdot \ldots \cdot\underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{\text{m mal}}}_{\text{n mal}} = a^{mn}$$

Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten multipliziert.

Beispiel:

$$\left(10^2\right)^3 = 10^6$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Wurzeln

Wurzeln stellen eine Umkehrung des Potenzierens dar

Wenn $a^n = x$ so kann man nach a auflösen $a = \sqrt[n]{x}$

Für $\sqrt[2]{x}$ schreibt man gewöhnlich $\sqrt{x}$ (Quadratwurzel).

Beispiele

$\sqrt[3]{1000} = 10$ weil $10^3 = 1000$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Da keine reelle Zahl mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergibt, haben (gerade) Wurzeln aus negativen Zahlen erstmal keine Lösung. Es ist jedoch möglich, ihnen in der Menge der komplexen Zahlen einen sinnvollen Wert zuzuordnen. Auch ungerade Wurzeln aus negativen (reellen) Zahlen definiert man ungerne, da dies zu Widersprüchen führen kann!

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Berechnung von Wurzeln

- Häufig durch „trial-and-error“
- Kein einfaches konstruktives Berechnungsverfahren wie bei den vier Grundrechenarten
- Überprüfung des Ergebnisses einfach
- Approximationsverfahren
- Reihenentwicklung
- Taschenrechner

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Eigenschaften von Wurzeln

- Ohne Beweis: Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl, d.h. sie kann nicht durch einen Bruch dargestellt werden („Quadratur des Kreises“).
- Wurzelgesetz zur Multiplikation $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- Wurzelgesetz zur Division $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- Beispiele: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{64}$

$$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \sqrt{4}$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Logarithmen

Logarithmen stellen eine zweite Form der Umkehrung des Potenzierens dar

Wenn $a^n = x$ so kann man nach n auflösen $\mathrm{n} = \log_{\mathrm{a}} x$

Für $\log_{\mathrm{e}} x$ schreibt man gewöhnlich $\ln x$

Beispiele

$\log_2 256 = 8$ weil $2^8 = 256$

$\log_{10} 1000 = 3$ weil $10^3 = 1000$

$\log_{10} 0{,}01 = -2$ weil $10^{-2} = 0{,}01$ (zu negativen Exponeten später mehr)

Auch beim Logarithmieren muss man auf die Zahlenbereiche aufpassen.
Mit Hilfe der komplexen Zahlen können auch hier wieder Logarithmen definiert werden, denen in der Menge der reellen Zahlen kein Wert zugeordnet werden könnte. Dabei muss jedoch einiges beachtet werden.

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Zusammenfassung

$$a^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = a$$

$$\log_a x = n$$

- In Worten: Die Wurzel fragt nach der Basis, der Logarithmus nach dem Exponenten.

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Verallgemeinerung der Potenzen - I

Bis jetzt waren unsere Exponenten immer natürliche Zahlen.

Läßt sich unsere Definition der Potenz auf beliebige Exponenten verallgemeinern?

Man kann alles mögliche definieren, z.B. $a^m = 1{,}456436$ für alle nichtnatürlichen m.

Das macht aber wenig Sinn, denn wir wollen unsere Potenzgesetze behalten.

Indem wir auf die weitere Gültigkeit der Potenzgesetze bestehen, können wir verallgemeinern

$$2^{-1} = 2^{1-2} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

allgemein

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Insbesondere ergibt sich hieraus eine Definition für "hoch null"

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \text{ für alle } a \neq 0$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Verallgemeinerung der Potenzen - II

Auch nichtganzzahlige Exponenten lassen sich so behandeln

$$2^{1/2} = \sqrt{2} \text{ weil } 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^{1/2}\right)^2 = 2^{2/2} = 2$$

allgemein

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Unter nochmaliger Anwendung der Potenzgesetze erhalten wir

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Siehe Übungen

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Verallgemeinerung der Potenzen - III

Zusammenfassung:

Negative Exponenten stellen Kehrwerte der Potenzen mit den entsprechenden positiven Exponenten dar.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Potenzen mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$ sind einfach nur n-te Wurzeln.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Alle anderen möglichen Kombinationen lassen sich mit Hilfe der Potenzgesetze zusammengesetzt behandeln.

Siehe Übungen