Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

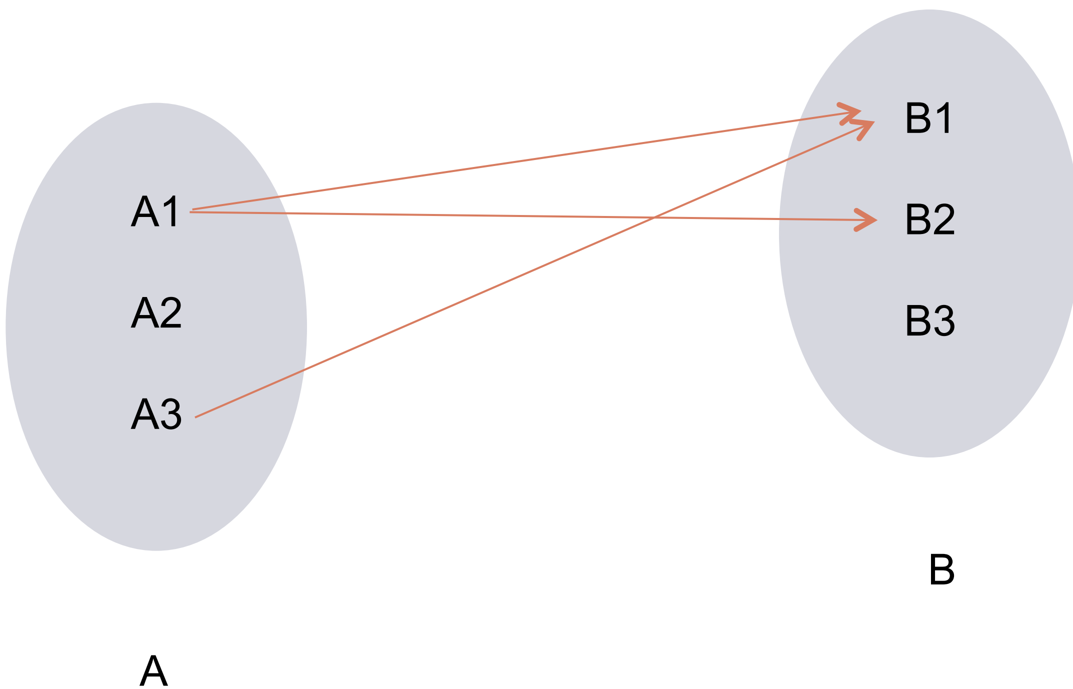
Funktionen

Dr. Björn S. Schmekel
Wintersemester 2010/2011

Funktionen

Abbildungen - I

Eine Abbildungen ist eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen.

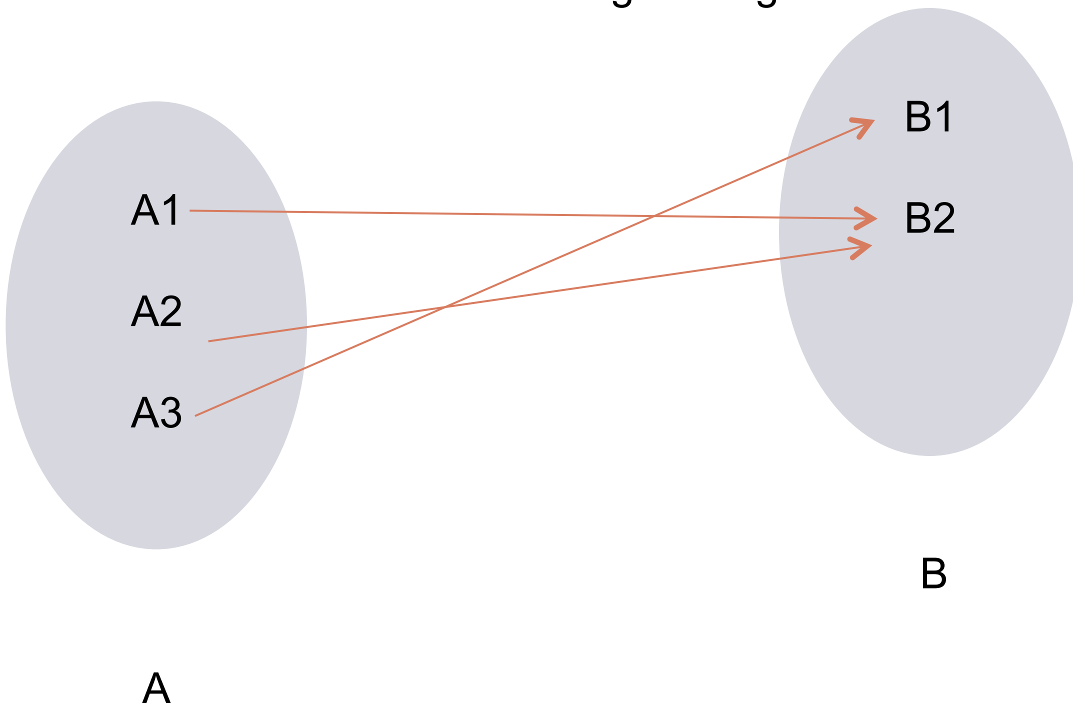


Siehe Übungen

Funktionen

Abbildungen - II

Eine Abbildung ist injektiv, wenn jedem Element aus der Menge A genau ein Element der Menge B zugeordnet wird.

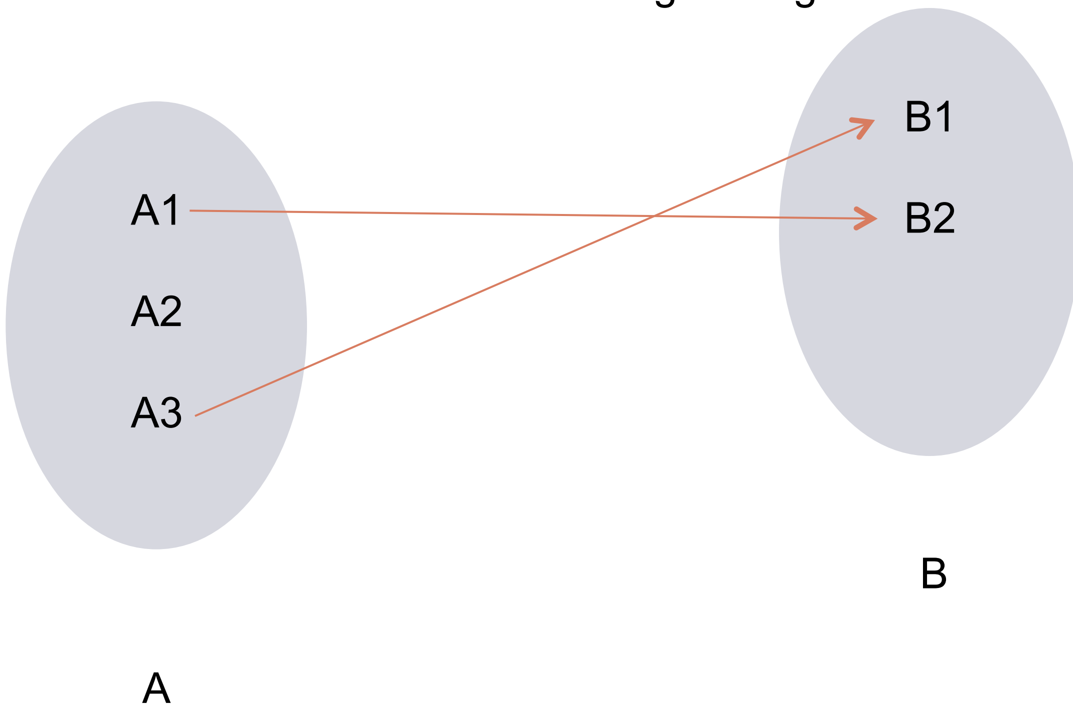


Siehe Übungen

Funktionen

Abbildungen - III

Eine Abbildung ist surjektiv, wenn jedem Element aus der Menge B ein Element aus der Menge A zugeordnet wird.

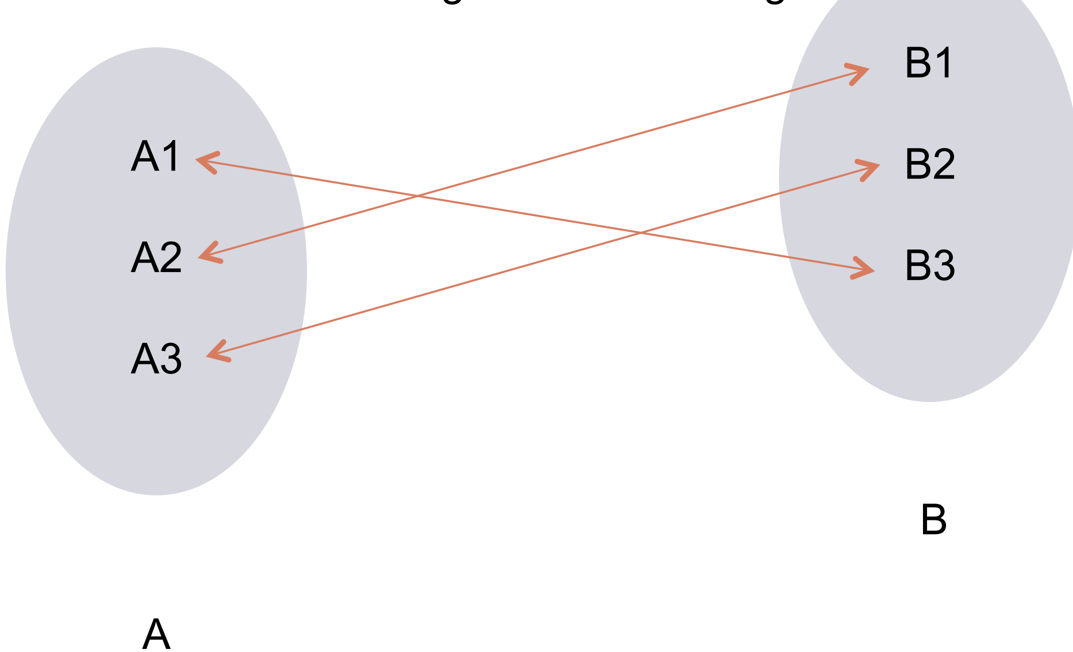


Siehe Übungen

Funktionen

Abbildungen - IV

Eine Abbildung ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist, d.h. jedem Element der Menge A wird genau ein Element der Menge B zugeordnet und umgekehrt.

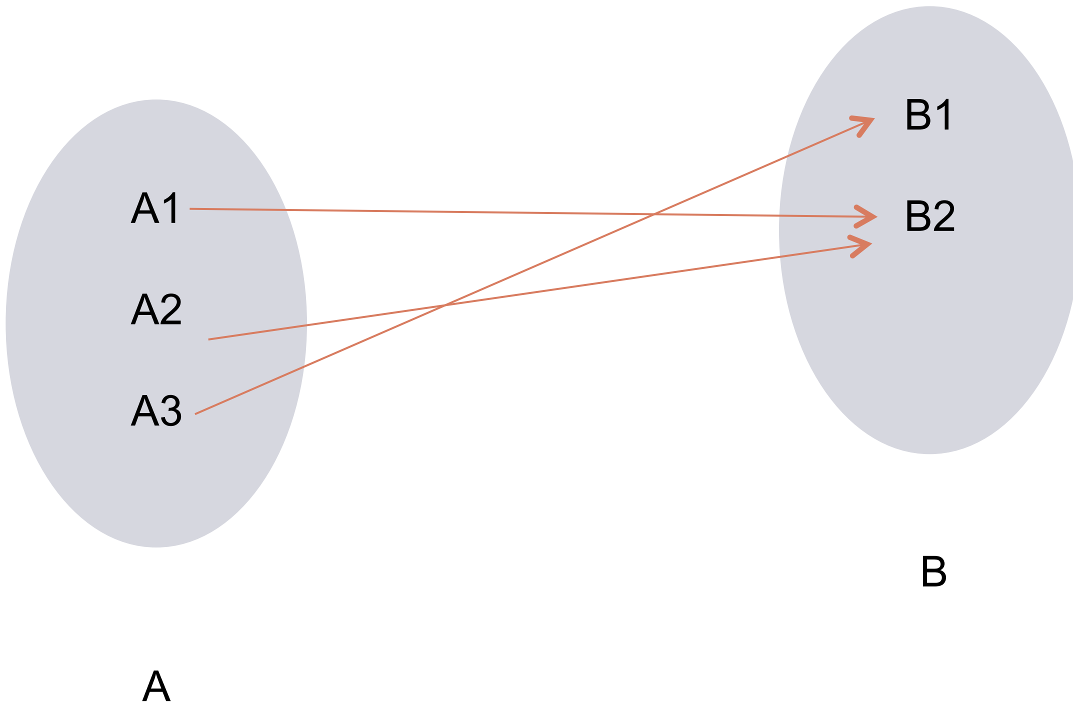


Siehe Übungen

Funktionen

Funktionsbegriff

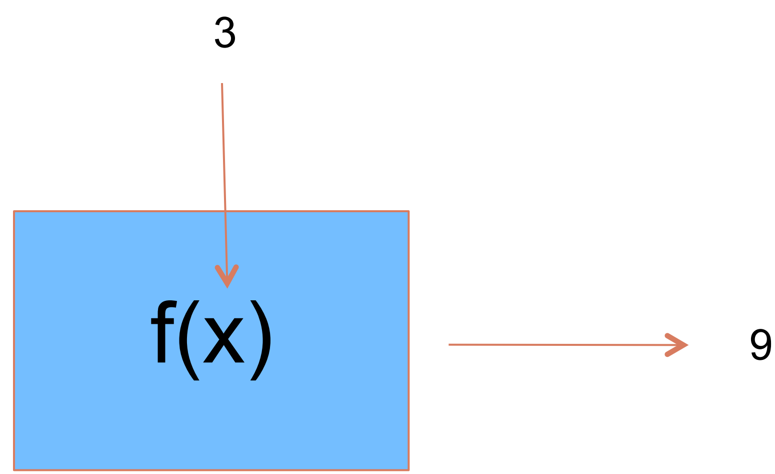
Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung von einer auf einer anderen Menge.
Eine solche Abbildung ist injektiv, aber nicht unbedingt surjektiv oder bijektiv.
Eine bijektive Abbildung nennt man auch eineindeutig.



Siehe Übungen

Funktionen

Funktionsbegriff – Vorstellung als „Black Box“



„Eine Zahl geht rein, eine Zahl kommt raus.“

Hier wäre $x=3$, $f(x)=x^2$ und $f(3)=9$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Darstellungen I“

Darstellung als Funktionsvorschrift

zum Beispiel

$$f(x) = x^2 - 3\sqrt{x}$$

oder auch stückweise

$$f(x) = \begin{cases} x & | \; x > 0 \\ -x & | \; x \leq 0 \end{cases}$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Darstellungen II“

Darstellung als Wertetabelle

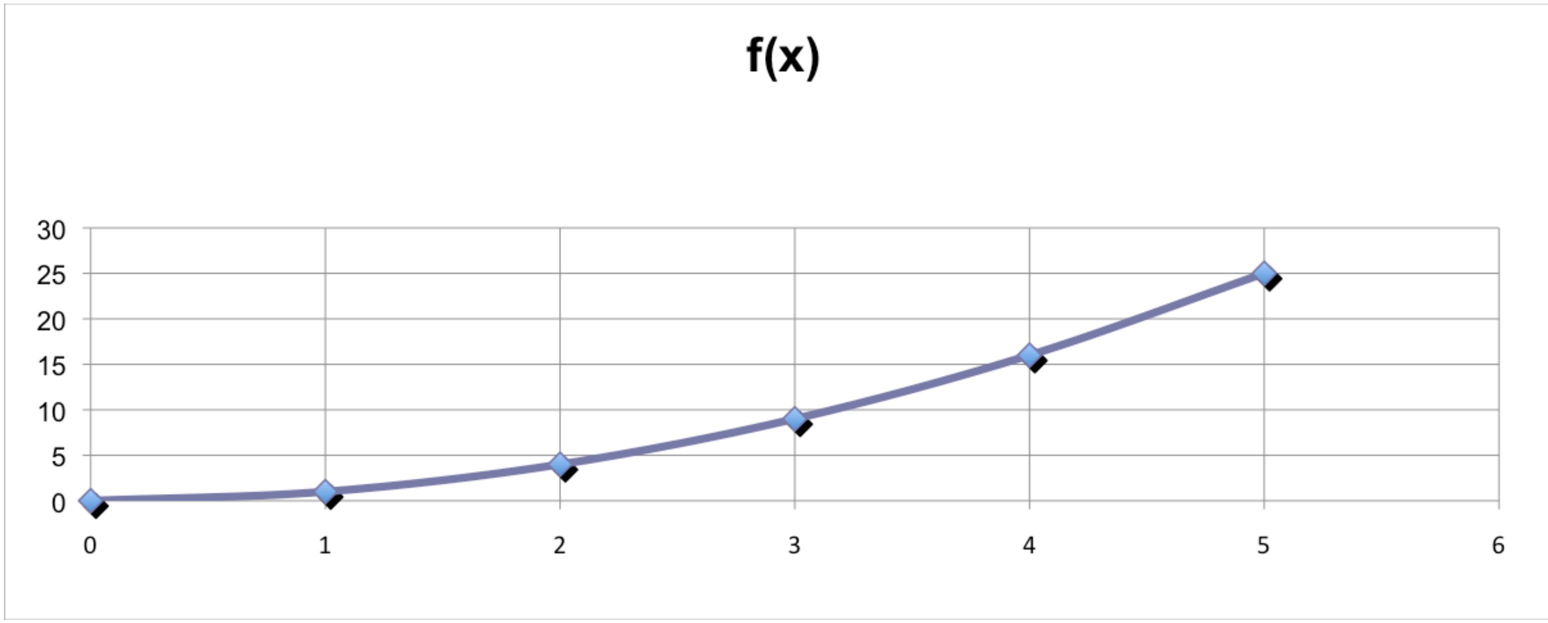
x	f(x)
1	1
2	4
3	9
4	16

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Darstellungen III“

Darstellung als Funktionsgraph



Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Nullstellen

Eine Funktion f(x) hat eine Nullstelle an der Stelle $x=x_0$, wenn f(x) an dieser Stelle gleich null ist.

Beispiel

$$f(x) = 3x - 5$$

Wo ist f(x) gleich null?

$$3x - 5 = 0$$

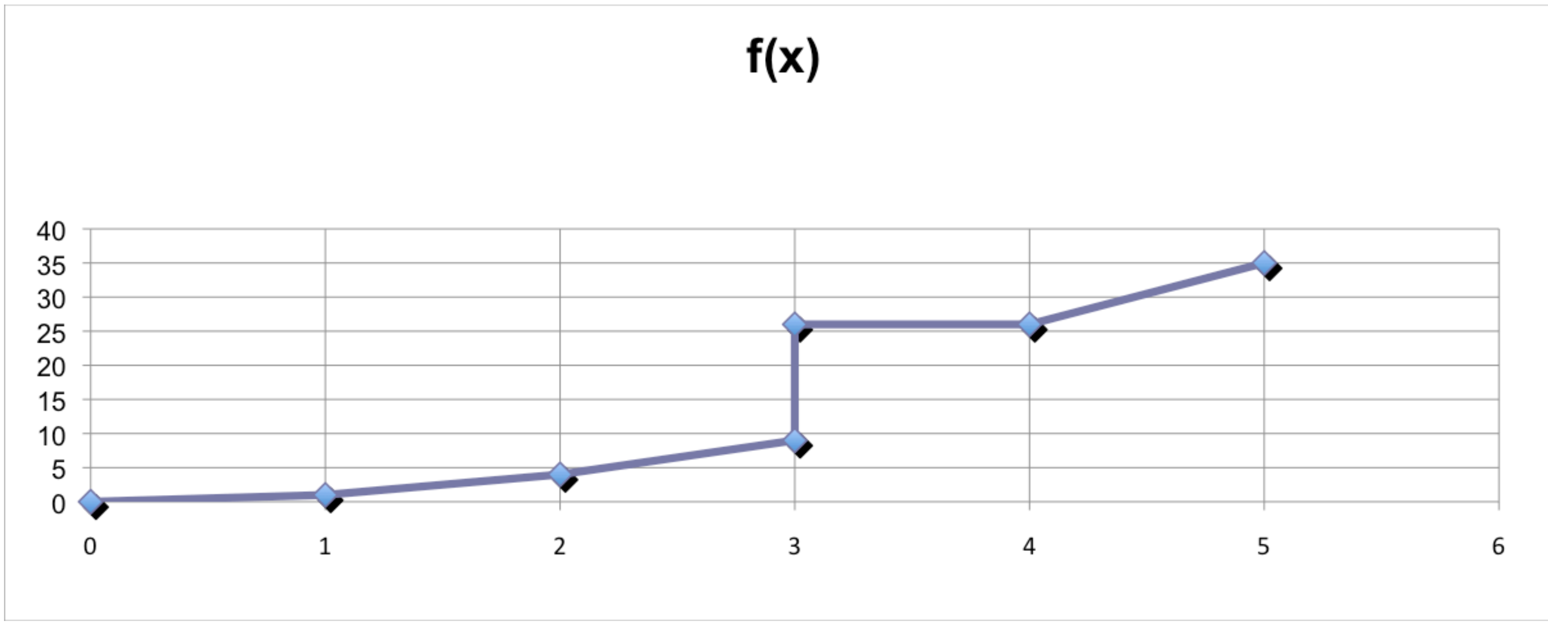
$$x = \frac{5}{3}$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Stetigkeit“

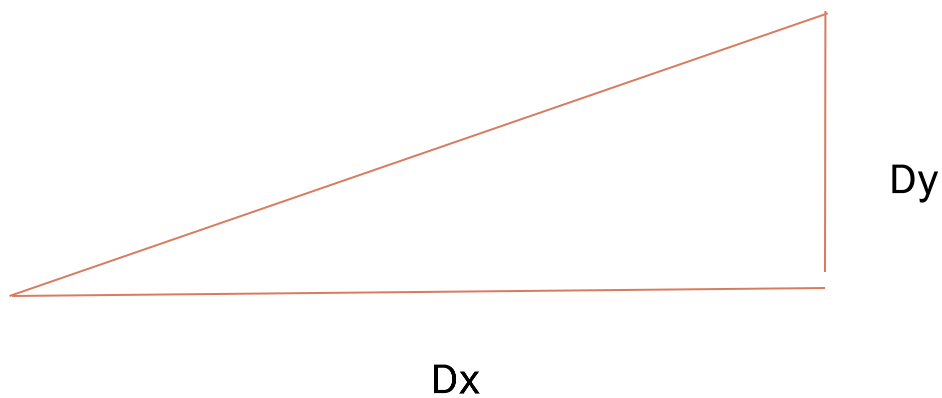
Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen.



Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Geradensteigung

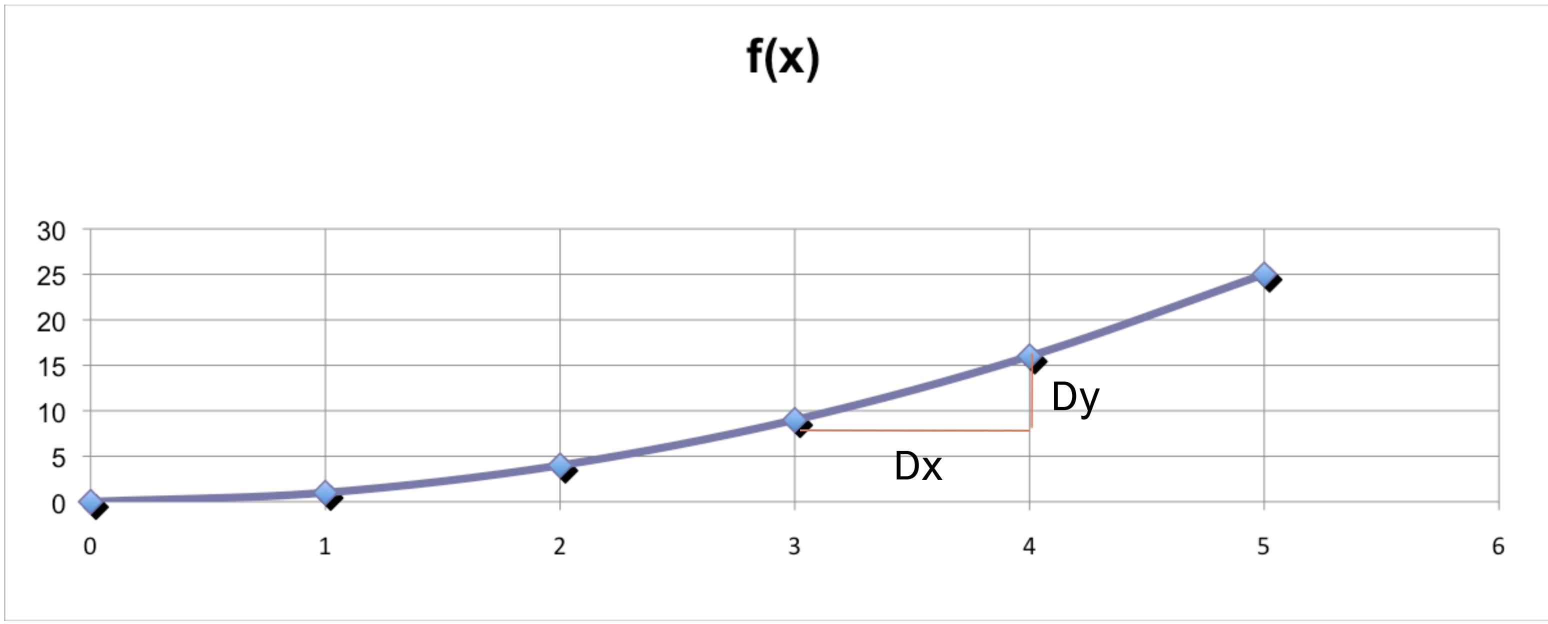


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Steigung



Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Die Ableitung als „Steigung in einem Punkt“

Die Verkleinerung des Steigungsdreiecks „auf einen Punkt“ erlaubt es, die Steigung in diesem Punkt zu bestimmen.

Formal schreibt man

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Die Ableitung als „Steigung in einem Punkt“

Beispiel: Die Steigung der Funktion f(x)=2x am Punkt x=3

$$f'(2) \approx \frac{2\cdot(3+0{,}1)-2\cdot 3}{0{,}1} = 2$$

$$f'(2) \approx \frac{2\cdot(3+0{,}01)-2\cdot 3}{0{,}01} = 2$$

etc.

Beispiel: Die Steigung der Funktion f(x)=x^2 am Punkt x=3

$$f'(2) \approx \frac{(3+0{,}1)^2-3^2}{0{,}1} = 6{,}1$$

$$f'(2) \approx \frac{(3+0{,}01)^2-3^2}{0{,}01} = 6{,}01$$

etc.

Probieren Sie es selbst!

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Ableitungsregeln“

Die Ableitungsfunktion lässt sich in der Regel mit Hilfe der folgenden Regeln viel schneller ermitteln:

$f(x)$	$f'(x)$
$cg(x)$	$cg'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$g(x)+h(x)$	$g'(x)+h'(x)$
$g(x)\cdot h(x)$	$g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$
$\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{h^2(x)}$
$f(g(x))$	$g'(x)\cdot f'(g(x))$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Ableitungsregeln spezieller Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Höhere Ableitung

Es kann nun auch die Ableitung der Ableitung bestimmt werden etc. (Höhere Ableitungen).

Beispiel

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = 0$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Ableitungsregeln - Beispiele

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = 5x^4 + x \quad f'(x) = 20x^3 + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = xe^x \quad f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

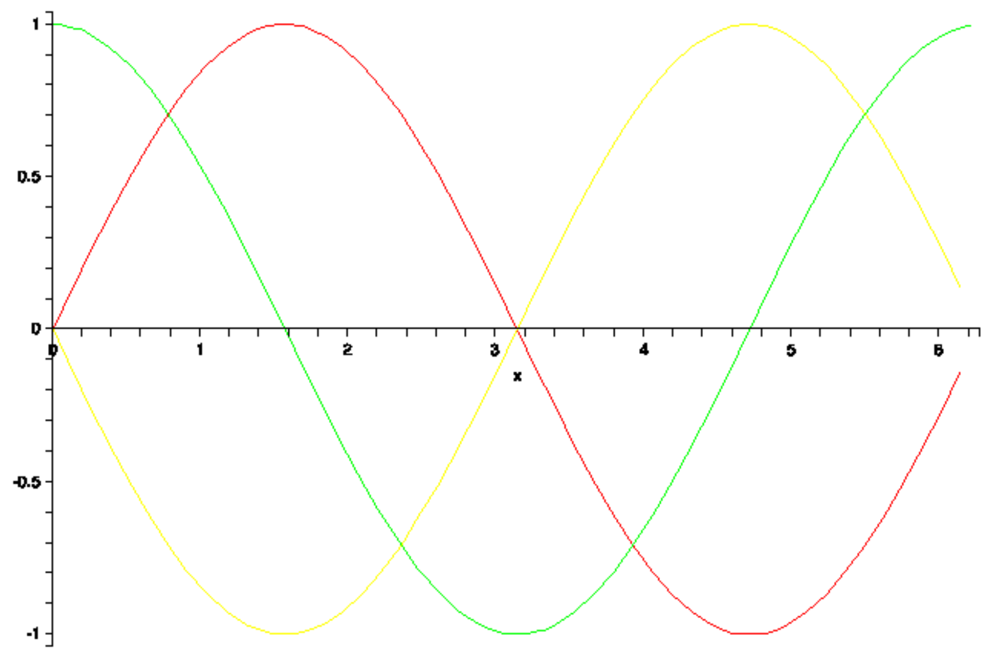
$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Maxima und Minima

Man betrachte den folgenden Funktionsgraphen.
Wie groß ist die Steigung an den Maxima und Minima?
Welche Aussage kann über die zweite Ableitung getroffen werden?



Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Bedingungen für Extrema

Es liegt ein Minimum an der Stelle x vor, wenn

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$$

Es liegt ein Maximum an der Stelle x vor, wenn

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$$

Siehe Übungen

Funktionen

Funktionen – Bedingungen für Wendepunkte und Sattelpunkte

Es liegt ein Wendepunkt an der Stelle x vor, wenn

$$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$$

Es liegt ein Sattelpunkt an der Stelle x vor, wenn

$$f'(x)=0 \wedge f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$$

Siehe Übungen