

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Elementare Finanzmathematik

Dipl.-Phys. C. Busch
Wintersemester 2010/2011

Elemente der Finanzmathematik:

Einfache Verzinsung

Bei der **einfachen Verzinsung** werden in den einzelnen Perioden nur die Zinsen für das Anfangskapital (**Barwert**) K_0 gezahlt, die bisher gezahlten Zinsen werden also *nicht* mitverzinst.

Bei der einfachen Verzinsung gibt es also *keinen* Zinseszinsseffekt.

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Einfache Verzinsung und Zinseszins: eine erste Aufgabe

a) Berechnen Sie: 37 % von 456 Euro.

Eine Privatperson hat einem Freund für fünf Jahre 100.000 Euro zu einem Zinssatz von 6 % p.a. (per annum: pro Jahr) geliehen.

b) Wie hoch ist das Endkapital (**Endwert**) nach fünf Jahren (also fünf Zinsperioden) bei einfacher Verzinsung?

c) Wie hoch ist der Endwert mit Zinseszinsen?

Siehe Übungen

???

Elemente der Finanzmathematik

Prozentrechnung ganz einfach

Was sind 37 % von 456 ?

???

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Prozentrechnung ganz einfach

37 % von 456 Euro sind

$$0,37 \cdot 456 \text{ €} = \underline{\underline{168,72 \text{ €}}}$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Prozentrechnung ganz einfach

a) $1\% = 1/100$

b) $1\text{‰} = 1/1.000$

c) $1\text{ppm} = 1/1.000.000$

d) $1\text{ppb} = 1/1.000.000.000$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Einfache Verzinsung und Zinseszins: eine erste Aufgabe

b) Endwert bei einfacher Verzinsung: 130000 Euro

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Einfache Verzinsung und Zinseszins: eine erste Aufgabe

c) Endwert mit Zinseszinsen:

133822,56 Euro

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

Zinsen nach einem Jahr :

$$z_1 = 100000 \cdot 0,06 = 6000\text{€}$$

Zinsen nach zwei Jahren :

$$z_2 = 100000 \cdot 0,06 + 100000 \cdot 0,06 = 2 \cdot 100000 \cdot 0,06 = 12000\text{€}$$

(Zinsen der ersten und zweiten Periode)

Zinsen nach 5 Jahren :

$$z_5 = 5 \cdot 0,06 \cdot 100000 = 30000\text{€}$$

(Zinsen der ersten fünf Perioden)

Für das Endkapital (Endwert) gilt :

$$K_5 = K_0 + 5 \cdot \frac{6}{100} = 100000 + 30000 = 130000 \text{ €}$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

Zinsen nach einem Jahr :

$$z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Zinsen nach zwei Jahren :

$$z_2 = K_0 \cdot \frac{p}{100} + K_0 \cdot \frac{p}{100} = 2 \cdot K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

(Zinsen der ersten und zweiten Periode)

Zinsen nach n Jahren :

$$z_n = n \cdot K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Für das Endkapital (Endwert) K_n nach n Jahren gilt :

$$K_n = K_0 + n \cdot K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

Für das Endkapital (Endwert) K_n nach n Perioden gilt :

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

Andere Fragestellung z.B.:

Ein Kapital soll in zehn Jahren bei 5 % Zinsen 54000 Euro betragen.

Wie hoch muss das Anfangskapital bei einfacher Verzinsung sein?

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

*Ein Kapital soll in zehn Jahren bei 5 % Zinsen 54000 Euro betragen.
Wie hoch muss das Anfangskapital bei einfacher Verzinsung sein?*

Gesucht ist jetzt nicht (wie vorhin) K_n , sondern K_0 . Ausgangsgleichung ist :

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$$

Umformung nach K_0 ergibt :

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot \frac{p}{100}} = \frac{54000}{1 + 10 \cdot \frac{5}{100}} = 36000 \text{ €}$$

Das Anfangskapital muss also 36000 € betragen.

Bemerkung : Entsprechend kann man auch nach der Anzahl n der Zinsperioden oder nach dem Zinssatz p fragen.

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

Bei der Zinseszinsrechnung werden sowohl das Anfangskapital als auch die Zinsen in den Perioden verzinst, das heißt die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen und von da an mitverzinst.

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

Das Kapital nach einer Periode :

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (Anfangskapital + Verzinsung)}$$

Nach zwei Perioden :

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Man nennt jetzt $1 + p/100 = q$ den **Zinsfaktor**.

Dann ist das Kapital nach n Perioden:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$$

Eine Privatperson hat einem Freund für fünf Jahre 100.000 Euro zu einem Zinssatz von 6 % p.a. (per annum: pro Jahr) geliehen.

c) Wie hoch ist der Endwert mit Zinseszinsen?

$$K_5 = 100000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 100000 \cdot 1,06^5 = 133822,56\text{€}$$

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

Andere Fragestellung z.B.:

Herr M. möchte seiner Tochter in zehn Jahren ein Studium an der Macromedia-Hochschule mit 50000 Euro finanzieren. Er kann einen Sparvertrag mit 7 % Zinsen abschließen.

Welche Summe muss er jetzt einzahlen?

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

Gegeben : $K_{10} = 50000 \text{ €}$

Gesucht ist der Barwert K_0

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_0 = \frac{K_{10}}{q^{10}} = \frac{50000}{1,07^{10}} = 25417,47 \text{ €}$$

Herr M. muss jetzt ca. **25417 Euro** einzahlen.

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik: Zinseszins

Die Bestimmung des Barwerts bei gegebenem K_n , q und n bezeichnet man als

Bestimmung des Barwerts oder **Diskontierung (Abzinsung)** eines Kapitals.

Dabei wird $\frac{1}{q^n}$ **Abzinsungsfaktor** genannt.

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Vokabular, das man kennen muss und das in Klausuraufgaben evtl. vorkommen kann:

- *Zinssatz p (in Prozent)*

- *Zinsfaktor q*

- *p.a.: „per annum“*

- *einfache Verzinsung*

- *Zinseszins*

- *Zinsperiode*

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

Vokabular, das man kennen muss und das in Klausuraufgaben evtl. vorkommen kann:

- *Barwert*
- *Endwert*
- Bestimmung des Barwerts bzw. Diskontierung (Abzinsung)
- Abzinsungsfaktor

Siehe Übungen

Elemente der Finanzmathematik

- Problem: Bernd benötigt 1.000.000€. Er hat z.Z. aber nur 10.000€, die er zu 4% anlegt (mit Zinseszinsen). Wie lange muss er warten, bis er die Million erreicht hat?

Elemente der Finanzmathematik

$$1.000.000 \text{ €} = 10.000 \text{ €} \cdot 1,04^n$$

$$1,04^n = 100$$

$$n \log 1,04 = \log 100$$

$$n = \frac{2}{\log 1,04} = 117,4$$